

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列下列命题中不正确的是()

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} = \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个

特解, 则

A. $a = -3, b = 2, c = -1$

B. $a = 3, b = 2, c = -1$

C. $a = -3, b = 2, c = 1$

D. $a = 3, b = 2, c = 1$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 2$ 处条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-1)^n$ 的

A. 收敛点, 收敛点

B. 收敛点, 发散点

C. 发散点, 收敛点

D. 发散点, 发散点

(4) 下列级数发散的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

的充分必要条件为

A. $a \notin \Omega, a \notin \Omega$

B. $a \notin \Omega, a \in \Omega$

C. $a \in \Omega, a \notin \Omega$

D. $a \in \Omega, a \in \Omega$

(6) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 = y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$,

若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变 $x = Qy$ 下的标准型为

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

A. $P(AB) \leq P(A)P(B)$

B. $P(AB) \geq P(A)P(B)$

C. $P(AB) \leq \frac{P(A)P(B)}{2}$

D. $P(AB) \geq \frac{P(A)P(B)}{2}$

(8) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, x_1, x_2, x_3 , 为来自该总的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] =$$

A. $(m-1)n\theta(1-\theta)$

B. $m(n-1)\theta(1-\theta)$

C. $(m-1)(1-\theta)\theta(1-\theta)$

D. $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上).

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 有方程 $e^z xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 设 Ω 是由 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则

$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15- 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1 + x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时为等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

(16) 计算二重积分 $\iint_D x(x + y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

(17) 已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于 0, 若对任意的 $x_0 \notin I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(19) 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x \end{cases}$, 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$.

计算曲线积分 $I = \int_L (y + z) dx + (z^2 - x^2 + y) dy + (x^2 + y^2) dz$.

(20) 向量组 a_1, a_2, a_3 , 是 R^3 的一个基, $b_1 = 2a_1 + 2ka_3, b_2 = 2a_2, b_3 = a_1 + (k+1)a_3$,

(I) 证明 b_1, b_2, b_3 为 R^3 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 e 在基 a_1, a_2, a_3 与基 b_1, b_2, b_3 下的坐标相同, 并求所有的 e .

(21) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求 a, b 的值。

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

(22) 设随机变量 x 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, 对 x 进行独立重复的观测, 直第 2 个大于 3 的观测值出现为止, 记 Y 的观测次数。

(1) 求 Y 的概率分布。

(2) 求 EY 。

$0 \leq x \leq 1$

(23) 设总体 x 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 随

机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

