

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设  $\{x_n\}$  是数列下列命题中不正确的是

A. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

B. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

C. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$

D. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n-1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(2) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其 2 阶导函数  $f''(x)$  的图形如右图所示, 则曲线的

$y = f(x)$  的拐点个数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

(3) 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$ , 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$

A.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

B.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

C.  $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$

D.  $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

(4) 下列级数发散的是

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n}$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$

C.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(5) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$ , 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解

的充分必要条件为

A.  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

B.  $a \notin \Omega, d \in \Omega$

C.  $a \in \Omega, d \notin \Omega$

D.  $a \in \Omega, d \in \Omega$

(6) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = py$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $P = (e_1, e_2, e_3)$ ,

若  $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ , 则  $(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = QY$  下的标准形为

A.  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

B.  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C.  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

D.  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若  $A, B$  为任意两个随机事件, 则

A.  $P(AB) \leq P(A)P(B)$

B.  $P(AB) \geq P(A)P(B)$

C.  $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$

D.  $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$

(8) 设总体  $X \sim B(m, \theta)$ ,  $X_1, X_2, X_3$  为来自该总的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 则

$$E = \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] =$$

A.  $(m-1)n\theta(1-\theta)$

B.  $m(n-1)\theta(1-\theta)$

C.  $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

D.  $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上).

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$ , 若  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi'(1) = 5$ , 则  $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 若函数  $z = z(x, y)$ , 有方程  $e^{x+2y+3z} + 2xyz = 1$  确定, 则  $dz|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的解, 且在  $x = 0$  处  $y(x)$  取得极值 3. 则

$y'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 2, -2, 1,  $B = A^2 - A + E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 则行列式

$|B| = \underline{\hspace{2cm}}$

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(1, 0; 1, 1; 0)$ , 则  $P\{xy - y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15- 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^2$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时为等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值.

(16) 计算二重积分  $\iint_D x(x+y)dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$ .

(17) 为实现利润最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型, 设  $Q$  为该商品的需求量,  $P$  为价格  $MC$  的边际成本,  $\eta$  为需求弹性 ( $\eta > 0$ ).

(1) 证明定价模型  $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$ ;

(2) 若该商品的成本函数  $C(Q) = 1600 + Q^2$ , 需求函数为  $Q = 40 - P$ , 试由(1) 中的定价模型确定此商品的价格.

(18) 设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于 0, 若对任意的  $x_0 \in I$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$  及  $x$  轴所围成区域的面积恒为 4, 且  $f(0) = 2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

(19)(1) 设函数  $u(x), v(x)$  可导, 利用导数定义证明  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ .

(2) 设函数  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导,  $f(x) = u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ , 写出  $f(x)$  的求导公式。

(20) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ , 且  $A^3 = 0$ ,

(1) 求  $a$  的值,

(2) 若矩阵  $x$  满足  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 求  $x$ .

(21) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $a, b$  的值。

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵。

(22) 设随机变量  $x$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 对  $x$  进行独立重复的观测, 直到第

2 个大于 3 的观测值出现为止, 记  $Y$  的观测次数。

(1) 求  $Y$  的概率分布;

(2) 求  $EY$ .

(23) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为

随机样本。

(1) 求  $\theta$  的矩估计量;

(2) 求  $\theta$  的最大似然估计量。

