

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上

(1) 下列反常积分收敛的是

A. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

C. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

D. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

(2) 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x} \right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

A. 连续

B. 有可去间断点

C. 有跳跃间断点

D. 有无穷间断点

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^a \cos \frac{1}{x^\beta} & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} (a > 0, \beta > 0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则

A. $a - \beta > 1$

B. $0 < a - \beta \leq 1$

C. $a - \beta > 1$

D. $0 < a - \beta \leq 2$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示, 则曲线的

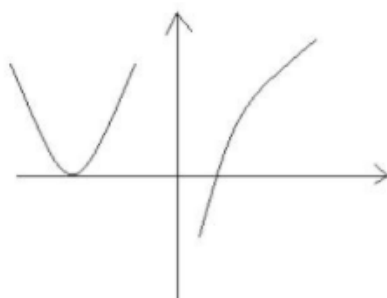
$y = f(x)$ 的拐点个数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3



(5) 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=1, v=1}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{u=1, v=1}$ 依次是

- A. $\frac{1}{2}, 0$
- B. $0, \frac{1}{2}$
- C. $-\frac{1}{2}, 0$
- D. $0, -\frac{1}{2}$

(6) 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数

$f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

- A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
- B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
- C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$
- D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(7) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

的充分必要条件为

- A. $a \notin \Omega, a \notin \Omega$
- B. $a \notin \Omega, a \in \Omega$
- C. $a \in \Omega, a \notin \Omega$
- D. $a \in \Omega, a \in \Omega$

(8) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$,

若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准型为

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上).

(9) 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} =$ _____

10) 函数 $f(x) = x^2 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$ _____

(11) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^x x f(t) dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$ 则 $f(1) =$ _____

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3. 则 $y(x) =$ _____

(13) 若函数 $z = z(x, y)$, 有方程 $e^{x+2y+3z} + 2xyz = 1$ 确定, 则 $dz \Big|_{(0,0)} =$ _____

(14) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____

三、解答题: 15- 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时为等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

(16) 设 $A > 0, D$ 是由曲线段 $y = A \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域,

V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积, 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

(17) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = 2(y+1)e^x, f'_x(x, 0) = (x+1)e^x, f(0, y) = y^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$ 的极值.

(18) 计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

(19) 已知函数 $\int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + f \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$, 求 $f(x)$ 的零点的个数。

(20) 已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻物体温度对时间的变化与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 恒温介质中冷却, 30 分钟后该物体温度降至 30°C , 若要该物体的温度继续降至 21°C , 还需要多长时间?

(21) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有 2 阶导数, $f(a)=0, f'(x)>0, f''(x)>c$ 设 $b>a$,

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明: $a < x_0 < b$ 。

(22) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 且 $A^3 = 0$,

(1) 求 a 的值。

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X 。

(23) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求 a, b 的值。

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。