

一、选择题: 1~8 题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导数如图所示, 则

- A. 函数有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

2、已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

- A. $f'_x - f'_y = 0$
- B. $f'_x + f'_y = 0$
- C. $f'_x - f'_y = f$
- D. $f'_x + f'_y = f$

(3) 设 $T_i = \iint_{D_i} \sqrt{x-y} dx dy (i=1,2,3)$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则

- A. $T_1 < T_2 < T_3$
- B. $T_3 < T_1 < T_2$
- C. $T_2 < T_3 < T_1$
- D. $T_2 < T_1 < T_3$

(4) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$, (k 为常数)

- A. 绝对收敛
- B. 条件收敛
- C. 发散
- D. 收敛性与 k 有关

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是

- A. A^T 与 B^T 相似

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似

D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为

1, 2, 则

A. $a > 1$

B. $a < -2$

C. $-2 < a < 1$

D. $a = 1$ 或 $a = -2$

7、设 A, B 为随机事件, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 若 $P(A|B) = 1$ 则下面正确的是

A. $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$

B. $P(A|\overline{B}) = 0$

C. $P(A+B) = 1$

D. $P(B|A) = 1$

8、设随机变量 X, Y 独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim (1, 4)$, 则 $D(XY)$ 为

A. 6

B. 8

C. 14

D. 15

二、填空题: 9 - 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____

(10) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____

(11) 设函数 $f(u, z)$ 可微, $z = z(x, y)$ 有方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则

$dz|_{(0,1)} =$ _____

(13)行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

14、设袋中有红、白、黑球各 1 个,从中有放回的取球,每次取 1 个,直到三种颜色的球都取到为止,则取球次数恰为 4 的概率为_____

三、解答题: 15- -23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15 (本题满分 10 分)求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

16、(本题满分 10 分) 设某商品的最大需求量为 1200 件,该商品的需求函数 $Q = Q(p)$,

需求弹性 $\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0)$, p 为单价(万元)

(1)求需求函数的表达式

(2)求 $p = 100$ 万元时的边际收益,并说明其经济意义。

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值。

(18) (本题满分 10 分)设还数 $f(x)$ 连续,且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$ 。

(19) (本题满分 10 分)求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域和和函数。

(20) (本题满分 11 分)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

(1)求 a 的值;

(2)求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1)求 A^{99} ;

(2)设 3 阶矩阵 $B = (a_1, a_2, a_3)$, 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示

为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服

从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$

(1) 写出 X, Y 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23) 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数,

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(1) 求 T 的概率密度

(2) 当 a 为何值时, aT 的数学期望为 θ