

一、选择题:1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分。下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 设 $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

A. a_1, a_2, a_3

B. a_2, a_3, a_1

C. a_2, a_1, a_3

D. a_3, a_2, a_1

2、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$

B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3、反常积分 ① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^x dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为

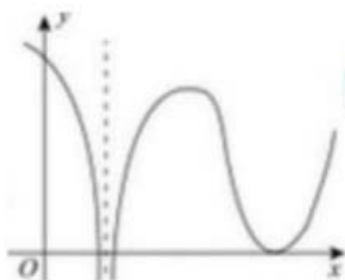
A. ①收敛, ②收敛.

B. ①收敛, ②发散.

C. ①发散, ②收敛.

D. ①发散, ②发散.

4、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则



A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

5、设函数 $f_i(x) (i=1,2)$ 具有二阶连续导数, 且 $f_i(x) < 0 (i=1,2)$, 若两条曲线

$y = f_i(x) (i=1,2)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$, 且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率

大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个领域内, 有

A. $f(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$

B. $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$

C. $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$

D. $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$

6、已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

A. $f'_x - f'_y = 0$

B. $f'_x + f'_y = 0$

C. $f'_x - f'_y = f$

D. $f'_x + f'_y = f$

7、设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是

A. A^T 与 B^T 相似.

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似

D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

8、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别

为 1,2, 则

A. $a > 1$

B. $a < -1$

C. $-2 < a < 1$

D. $a = 1$ 与 $a = -2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为 _____

10、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____

11、以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为 _____

12、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 则当 $n \geq 2$ 时,

$f^{(n)}(0) =$ _____

13、已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l , 若点 P 的横坐标时间的变化率为常数 V_0 , 则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时, l 对时间的变化率是 _____

14、设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价, 则 $a =$ _____

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}}$

16、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

17、(本题满分 10 分) 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

18、(本题满分 10 分) 设 D 是由直线 $y = 1, y = x, y = -x$ 围成的有界区域, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} dx dy.$$

19、(本题满分 10 分) 已知 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = \mu(x)e^x$ 是二阶微分方程

$(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的两个解, 若 $\mu(-1) = e, \mu(0) = -1$, 求 $\mu(x)$ 并写出该微分方程的通解.

20、(本题满分 11 分) 设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$ 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

21、(本题满分 11 分) 已知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$,

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

22、(本题满分 11 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

23、(本题满分 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 求 A^{99}

(2) 设 3 阶矩阵 $B = (a_1, a_2, a_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 a_1, a_2, a_3 的线性组合.

