一、 选择题 1-8 小题.每小题 4 分，共 32 分，

1.若函数 $f(x)=\begin{cases}1-\cos\sqrt{x}, x>0\\ b, \quad x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

A. $ab=\frac{1}{2}$

B. $ab=-\frac{1}{2}$

C. $ab=0$

D. $ab=2$

2.设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)-1$，且 $f''(x)>0$，则

A. $\int_{-1}^{1} f(x)dx>0$

B. $\int_{-1}^{1} f(x)dx<0$

C. $\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx$

D. $\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx$

3.设数列 $\{x_n\}$ 了收敛，则

A.当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

B.当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

C.当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x2_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

D 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

4.微分方程 $y''+4y'+89=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

A. $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

B. $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

C. $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

D. $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

5. 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y) 都有可 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$

,则

A. $f(0,0) > f(1,0)$

B. $f(0,0) < f(1,1)$

C. $f(0,1) > f(1,0)$

D. $f(0,1) < f(1,0)$

6.甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位:米)处，如图中，实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$(单位:米/秒)，虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$(单位:米/秒)，三块阴影部分的面积分别为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻为 t_0，则( )

A. $t_0 = 10$

B. $15 < t_0 > 20$

C. $t_0 = 25$

D. $t_0 > 25$

7. 设 A 为三阶矩阵，，$P = (a_1, a_2, a_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P_{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则

$A(a_1 + a_2 + a_3) =$

A. $a_1 + a_2$

B. $a_2 + 2a_3$

C. $a_2 + a_3$

D. $a_1 + 2a_3$

8.已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则

A.A,C 相似，B,C 相似

B.A,C 相似，B,C 不相似

C.A,C 不相似，B,C 相似

D.A,C 不相似，B,C 不相似

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.把答案填在题中横线上)

9.曲线$y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)$的斜渐近线为__________

10. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$确定， 则$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$__________

12. 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数， 且已知 $df(x,y)=ye_y dx+x(1+y)e_y dy, f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$__________

13.$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=$__________

14.设矩阵$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,则$a=$__________

三、解答题

15. (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

16. (本题满分 10 分)

设函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos,x)$,求$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0},\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

17. (本题满分 10 分)

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

18. (本题满分 10 分)

已知函数$y(x)$是由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$

19. (本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}<0$，证明:

(1)方程$f(x)=0$在区间$[0,1]$至少存在一个实根;

(2)方程$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

20. (本题满分 11 分)

已知平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le2y\}$，计算二重积分$\iint\limits_D(x+1)^2d\sigma=0$

21. (本题满分 11 分)

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 上的可导函数，且 $y(1)=0$.点 P 是曲线 $L: y=y(x)$ 上的任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,\ Y_P)$，法线与 X 轴相交于点 $(X_P,0)$. 若 $X_P=Y_P$，求 L 上的点的坐标 (x,y) 满足的方程.

22. (本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 有三个不同的特征值，且 $a_3=a_1+2a_2$，

(1)证明: $r(A)=2$；

(2)若 $\beta=a_1+a_2+a_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

23. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-2x_2+ax_3+x_1-x_2 8x_1+x_3 2$ 在正交变换 x=Qy 下的标准形为

又由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3$，得非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的特解可取为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

23.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

【详解】二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$

因为二次型的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$. 也就说明矩阵 A 有零特征值，所以 $|A|=0$，故 $a=2$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&4\\1&\lambda+1&1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$$

令 $|\lambda E-A|=0$ 得矩阵的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

通过分别解方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$ 得矩阵的属于特征值 $\lambda_1=-3$ 的特征向量 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，属于特征值特征值 $\lambda_2=6$ 的特征向量 $\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\lambda_3=0$ 的特征向量 $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

所以 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 为所求正交矩阵.