

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 则

A. $a = \frac{1}{2}, b = -1$

B. $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

C. $a = \frac{1}{2}, b = 1$

D. $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

2. 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是

A. $f(x) = |x| \sin |x|$

B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C. $f(x) = \cos |x|$

D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2 - ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x - b, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(x) + g(x)$ 在 R 上连续, 则

A. $a = 3, b = 1$

B. $a = 3, b = 2$

C. $a = -3, b = 1$

D. $a = -3, b = 2$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则

A. 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

B. 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

C. 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

5. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

A. $M > N > K$

B. $M > K > N$

C. $K > M > N$

D. $K > N > M$

6. $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} (1+xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy =$

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{3}$

D. $\frac{7}{6}$

7. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则

A. $r(A \ AB) = r(A)$.

B. $r(A \ B A) = r(A)$.

C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$.

D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$.

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$

11. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 曲线 $\begin{cases} x = x \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 设 A 为 3 阶矩阵, a_1, a_2, a_3 为线性无关的向量组. 若

$Aa_1 = 2a_1 + a_2 + a_3, Aa_2 = a_2 + 2a_3, Aa_3 = -a_2 + a_3$, 则 A 的实特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15- 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

16. (本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(x-y) dt = ax^2$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) dx dy$.

18. (本题满分 10 分)

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明 $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$.

19. (本题满分 10 分)

将长为 $2m$ 的铁丝分成三段, 依次围城圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存

在最小值?若存在, 求出最小值。

20. (本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$, 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA

与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积, 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率。

21. (本题满分 11 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} - 1 (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

22. (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数。

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形

23. (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求 a

(2) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P